ജ്യാമിതി

Geometry

സ്പേസിന്റെയും അതിലുള്ള വസ്തുക്കളുടെയും ഗുണധർമങ്ങളെക്കുറിച്ചു പ്രതിപാദിക്കുന്ന ഗണിതശാസ്ത്രശാഖ. 'ജ്യ' (ഭൂമി), 'മെട്രോൺ' (അളവ്) എന്നീ ഗ്രീക്കു പദങ്ങളിൽ നിന്നാണ് ജ്യാമിതി എന്നർഥം വരുന്ന ജ്യോമട്രി എന്ന ഇംഗ്ലീഷ് സംജ്ഞ രൂപംകൊണ്ടത്. ജ്യാമിതിക്കു പല വിഭാഗങ്ങളും ഇന്നു നിലവിലുണ്ട്. സമതല ജ്യാമിതി (Plane Geometry), ഘന ജ്യാമിതി (Solid Geometry) തുടങ്ങിയ ക്ലാസ്സിക്കൽ പഠനവിഭാഗങ്ങളും, അമൂർത്തങ്ങളായ ആശയങ്ങളും ചിന്താധാരകളും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ടോപോളജി (Tropology) പോലുള്ള ആധുനിക വിഭാഗങ്ങളും ഇതിലുൾപ്പെടുന്നു.

ലേഖനസംവിധാനം

I. ആമുഖം
II. ജ്യാമിതിയുടെ വികാസം
1. പ്രാചീന ജ്യാമിതി
i. ഈജിപ്തുകാർ, ബാബിലോണിയക്കാർ
ii. ഗ്രീക്കുകാരുടെ സമീപനം
2. ജ്യാമിതിയിലെ ആധുനികത
i. പ്രക്ഷേപീയ ജ്യാമിതി
ii. ജ്യാമിതിയും ബീജഗണിതവും
iii. അവകല ജ്യാമിതി
iv. വിവരണാത്മക ജ്യാമിതി
v. അയൂക്ലീഡിയൻ പശ്ചാത്തലം
(vi) റീമാനിയൻ ജ്യാമിതി
(vii) ടോപോളജി
III യൂക്ലീഡിയൻ ജ്യാമിതി
1. യൂക്ലിഡിന്റെ ആക്സിയങ്ങൾ
2. സമതല ജ്യാമിതി
3. പ്രമേയങ്ങളും തെളിവുകളും
4. നിർമിതികൾ
5. ഘന ജ്യാമിതി
6. അമൂർത്തങ്ങളായ യൂക്ലീഡിയൻ ജ്യാമിതി
IV വിശ്ലേഷക ജ്യാമിതി
1. നേർവരകൾ
2. വൃത്തം
3. കോണികങ്ങൾ
4. ത്രിവിമീയ വിശ്ലേഷക ജ്യാമിതി
V അയൂക്ലീഡിയൻ ജ്യാമിതി
1. ഹൈപർബൊളിക ജ്യാമിതി
2. എലിപ്റ്റിക ജ്യാമിതി

I. **ആമുഖം**. പ്രാചീന നാഗരികതകളുടെ പ്രായോഗികാവശ്യങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെട്ടാണു ജ്യാമിതി ഉരുത്തിരിഞ്ഞത്. ആദ്യകാലത്ത് ഈജിപ്തിലും മെസപ്പൊട്ടേമിയയിലും ഭൂമി അളക്കാൻ സർവേക്ഷണം ചെയ്യുന്നവർ ജ്യാമിതി ഉപയോഗിച്ചുതുടങ്ങി. പിന്നീട് ഗ്രീക്കുകാരുടെ സംഭാവനകളിലൂടെ ജ്യാമിതി ഒരു ശാസ്ത്രമായി വളർന്നു.

ഒരു നേർവരയ്ക്കു ചെറിയ തോതിലാണെങ്കിലും ഒരു വീതി (width)യും സങ്കീർണമായ തന്മാത്രീയ ഘടനയുമുണ്ട്. എന്നാൽ ഗണിതശാസ്ത്രപരമായ അവലോകനത്തിൽ ഇവയൊക്കെ അവഗണിച്ച് രേഖയുടെ നീളവും ഋജുത്വ (straightness) വും മാത്രം കണക്കിലെടുക്കുന്നു. അതുപോലെ ഒരു റബ്ബർ പന്തിന്റെ ആകൃതിയിലുള്ള ഏറ്റക്കുറച്ചിലുകൾ അവഗണിച്ച് അതിനെ ഗണിതശാസ്ത്രപരമായ ഒരു ഗോളമായി കരുതുന്നു. ചുരുക്കത്തിൽ ഭൗതിക പദാർഥങ്ങളുടെ മാതൃകാരൂപം (idealised shape) ആണ് ജ്യാമിതിയിൽ പരിഗണിക്കുന്നത്.

II. **ജ്യാമിതിയുടെ വികാസം**. ആദ്യകാലത്ത് കൃഷിഭൂമിയുടെ അതിരുകളവ്, വിസ്തീർണം എന്നിവയുടെ നിർണയത്തിനും പാർപ്പിടങ്ങൾ, ആരാധനാലയങ്ങൾ, പിരമിഡുകൾ, തോടുകൾ എന്നിവയുടെ നിർമാണത്തിനും ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങളുടെ നീളം, വിസ്തീർണം, ഉള്ളളവ് എന്നിവയെക്കുറിച്ചുള്ള സാമാന്യമായ അറിവു വേണ്ടിവന്നു. പില്ക്കാലത്ത്, വിസ്തൃതങ്ങളായ ഭൂപ്രദേശങ്ങളുടെ സർവേ, ഭൂപട നിർമാണം, ഭൂമിയുടെ ആകൃതി നിർണയനം, ഗ്രഹങ്ങളുടെ സഞ്ചാരപഥപഠനം ഇവയൊക്കെ ജ്യാമിതീയ പഠനങ്ങളെ വിപുലമാക്കി.

1. **പ്രാചീന ജ്യാമിതി** (Ancient Geometry).

(i) **ഈജിപ്തുകാർ, ബാബിലോണിയക്കാർ**. ഈജിപ്ത്, ബാബിലോണിയ, ഇന്ത്യ, ചൈന എന്നീ രാജ്യങ്ങൾ പുരാതന കാലത്തുതന്നെ ഗണിതശാസ്ത്രപരമായ നേട്ടങ്ങൾ കൈവരിച്ചിരുന്നു. ബി.സി. 4000-300 കാലഘട്ടത്ത് ഈജിപ്തുകാരും ബാബിലോണിയക്കാരും ത്രികോണം, ദീർഘചതുരം, വൃത്തം എന്നിവയുടെ സവിശേഷതകൾ സംബന്ധിച്ച ജ്യാമിതീയ വിശകലനം നടത്തിയതിന്റെ ചരിത്രരേഖകൾ ലഭ്യമാണ്. ഇവരുടെ നാഗരികതകൾ മുഖ്യമായും കൃഷിയിലധിഷ്ഠിതമായിരുന്നു. അതിനാൽ കൃഷിസ്ഥലങ്ങളുടെ അളന്നുതിരിക്കലിലും അവയുടെ ചുറ്റളവും വിസ്തീർണവും കണക്കുകൂട്ടുന്നതിലും അവർ ശ്രദ്ധ ചെലുത്തി. നൈൽനദിയിലെ വെള്ളപ്പൊക്കത്തിൽ കൃഷിഭൂമി നഷ്ടപ്പെട്ടവർക്ക് അവരുടെ ഭൂമിയുടെ വിസ്തീർണമനുസരിച്ച് കൃഷിസ്ഥലങ്ങൾ പുനർനിർണയം ചെയ്തുകൊടുക്കേണ്ടി വന്നു. ജ്യാമിതിയുടെ തുടക്കം ഇതിൽ നിന്നാണ് എന്നു ബി.സി. 5-ാം ശ.-ലെ ഗ്രീക്കു ചരിത്രകാരനായ ഹെറൊഡോട്ടസ് രേഖപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്. ബാബിലോണിയയിൽ ജലസേചനത്തിനു യൂഫ്രട്ടിസ്, ടൈഗ്രിസ് എന്നീ നദികളിൽ നിന്നു വലിയ തോടുകൾവഴി ജലം കൊണ്ടുവന്നിരുന്നു. ഈ തോടുകൾ നിർമിക്കാൻ കുഴിച്ചെടുക്കേണ്ട മണ്ണിന്റെ വ്യാപ്തം നിർണയിക്കേണ്ടിവന്നു. ആരാധനാലയങ്ങൾ, പിരമിഡുകൾ എന്നിവയുടെ നിർമിതിക്കു വിസ്തീർണം, വ്യാപ്തം എന്നിവയെ സംബന്ധിച്ച സാമാന്യമായ അറിവ് ആവശ്യമായി വന്നു. ഇവയൊക്കെ ജ്യാമിതിയുടെ തുടക്കത്തിനും പുരോഗതിക്കും നിദാനമായി. *അഹ്മെസ് പാപ്പിറസ്* (ബി.സി.1650) എന്ന പ്രാചീന ഈജിപ്ഷ്യൻ ഗ്രന്ഥത്തിൽ ജ്യാമിതിയിലെ കുറെ പ്രശ്നങ്ങളും അവയുടെ നിർധാരണവും അടങ്ങിയിട്ടുണ്ട്.

(ii) **ഗ്രീക്കുകാരുടെ സമീപനം**. ജ്യാമിതിയുടെ പ്രാഥമിക പാഠങ്ങൾ ഉൾക്കൊണ്ട് ധൈഷണികമായ തലത്തിലേക്ക് ആദ്യമായി അന്വേഷണമാരംഭിച്ചതു ഗ്രീക്കുകാരാണ്. അവരുടെ ഗണിതീയ സിദ്ധാന്തങ്ങൾ രചിക്കപ്പെട്ടത് ബി.സി. 600-200 കാലയളവിലാണ്. ഗ്രീക്കു ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞരിൽ പലരും തത്ത്വചിന്തകർ കൂടിയായിരുന്നു. പ്രകൃതിയുടെ രൂപകല്പന ജ്യാമിതീയമാണെന്ന് അവർ വിശ്വസിച്ചു. 'ഈശ്വരൻ അനശ്വരമായി ജ്യാമിതീകരിക്കുന്നു (God eternally geometrizes)' എന്ന പ്ലേറ്റോയുടെ സാക്ഷ്യപ്പെടുത്തൽ ഗ്രീക്കുകാരുടെ ഗണിതസങ്കല്പം വ്യക്തമാക്കുന്നു. സ്വയംസിദ്ധങ്ങളായ പ്രസ്താവനകളിൽ നിന്നു കാര്യകാരണസഹിതം നിഗമനങ്ങളിലെത്തുക എന്നതായിരുന്നു അവരുടെ രീതി. സ്വയംസിദ്ധങ്ങളായ ഇത്തരം പ്രസ്താവനകളാണ് അഭിഗൃഹീതങ്ങൾ (axioms). ഉദാ. ഒരു ഋജുരേഖ എതിർദിശകളിലേക്ക് അനന്തമായി നീണ്ടുപോകുന്നു; സന്നിപതിക്കുന്ന (coincide) രൂപങ്ങൾ സർവസമ (congruent)ങ്ങളാണ്. *എലിമെന്റ്സ്* എന്ന ഗ്രന്ഥത്തിൽ യൂക്ലിഡ് (ബി.സി. 3-ാം ശ.) ഇത്തരം അഭിഗൃഹീതങ്ങളുപയോഗിച്ച് അഞ്ഞൂറോളം പ്രമേയങ്ങൾ അവ

തരിപ്പിച്ചിട്ടുണ്ട്. യൂക്ലീഡിയൻ ജ്യാമിതിയിൽ അക്കാലത്ത് അറിയാമായിരുന്ന ബീജഗണിതവും കാണാം. ഉദാ. $x^2 - 8x + 7 = 0$ എന്ന ദ്വിഘാത സമവാക്യത്തിന്റെ നിർധാരണമൂല്യം സംഖ്യയ്ക്കു പകരം ഒരു രേഖാഖണ്ഡമായി കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

ഗ്രീക്ക് ജ്യാമിതി കൈകാര്യം ചെയ്ത പ്രധാനാശയങ്ങൾ സർവസമത (congruence), സമരൂപത (similarity), തുല്യത (equivalence) എന്നിവയാണ്. അലക്സാൻഡ്രിയൻ കാലഘട്ടത്തിൽ (ബി.സി. 4-ാം ശ.) ഗ്രീക്ക് ഗണിതത്തിനു പ്രായോഗികമായ ഒരടിത്തറ കൈവന്നു. ഇക്കാലത്താണ് ആർക്കിമെഡിസ് π (പൈ)യുടെ വില നും $3\frac{10}{71}$ നും ഇടയ്ക്കാണെന്നു കണ്ടുപിടിച്ചത്. എ.ഡി. 18-ാം ശ. വരെ ഗണിതശാസ്ത്രത്തിൽ മുഖ്യസ്ഥാനം ഗ്രീക്കുകാരുടെ ക്ലാസ്സിക് ജ്യാമിതിക്കായിരുന്നു.

2. **ജ്യാമിതിയിലെ ആധുനികത**

(i) **പ്രക്ഷേപീയ ജ്യാമിതി** (Projective Geometry). ആധുനിക ജ്യാമിതിയുടെ ഒരു പ്രധാന ശാഖയാണിത്. പ്രകൃതിയിലെ ജ്യാമിതീയ രൂപമുള്ള വസ്തുക്കൾക്കു പ്രക്ഷേപ(projection)ത്തിലൂടെയുണ്ടാകുന്ന മാറ്റമാണ് ഇതിൽ പഠനവിധേയമാക്കുന്നത്. ത്രിവിമീയ വസ്തുക്കളെ ദ്വിവിമീയ കാൻവാസിൽ പകർത്താൻ ചിത്രമെഴുത്തുകാർ നടത്തിയ ശ്രമങ്ങളിൽ നിന്നാണ് ഈ ജ്യാമിതിയുടെ തുടക്കം. 14-ാം ശ.-ത്തിലെ നവോത്ഥാന (renaissance)ത്തോടെ കൂടുതൽ യഥാതഥ(realistic)മായ ഒരു ശൈലി ചിത്രകാരന്മാർ സ്വീകരിച്ചു. അവർ അവതരിപ്പിച്ച പ്രക്ഷേപം, ഛേദം (section) എന്നിവയെക്കുറിച്ചുള്ള ആശയങ്ങൾ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞർക്കു മൗലികപ്രാധാന്യമുള്ള ഒരു ജ്യാമിതീയ പ്രശ്നമായിരുന്നു. പ്രക്ഷേപത്തിലൂടെ ജ്യാമിതീയാകൃതിയുടെ ഛേദത്തിനു മാറ്റം സംഭവിക്കുന്നുണ്ടെങ്കിലും അതിന്റെ മറ്റു ഗുണധർമങ്ങൾക്ക് ഒരു മാറ്റവും സംഭവിക്കുന്നില്ല എന്ന് അവർ മനസ്സിലാക്കി.

ജെറാൾഡ് ദെസാർഗ്യു (1591-1661), ബ്ലെയ്സ് പാസ്കൽ (1623-62), ഗാസ്പാർഡ് മോംഗ് (1746-1818), പോൺസലെ (1788-1867) എന്നിവരെല്ലാം പ്രക്ഷേപീയ ജ്യാമിതിയിൽ പഠനം നടത്തിയവരാണ്.

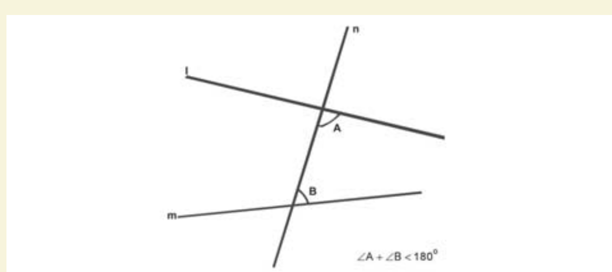
(ii) **ജ്യാമിതിയും ബീജഗണിതവും**. 17-ഉം 18-ഉം ശ.-ങ്ങളിലെ ശാസ്ത്രീയ പുരോഗതി കൂടുതൽ സങ്കീർണമായ ജ്യാമിതീയ പ്രശ്നങ്ങൾ കൈകാര്യം ചെയ്യാനിടയാക്കി. കോപ്പർനിക്കസിന്റെയും കെപ്ലറുടെയും ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്ര നിഗമനങ്ങളനുസരിച്ച്, സൂര്യനെ ചുറ്റിയുള്ള ഗ്രഹങ്ങളുടെ പഥം നിർണയിക്കപ്പെട്ടതോടെ കോണിക പരിച്ഛേദങ്ങളെ(conic sections) കുറിച്ചുള്ള പഠനം സജീവമായി. പീരങ്കിയിൽ നിന്നു കുതിച്ചുപായുന്ന വെടിയുണ്ട സഞ്ചരിക്കുന്നത് ഒരു പ്രക്ഷേപ്യ(projectile)ത്തിന്റെ പഥത്തിലൂടെയാണെന്നു മനസ്സിലായതോടെ ഈ ജ്യാമിതീയ പഥത്തെക്കുറിച്ചു കൂടുതൽ അറിയേണ്ട ആവശ്യം വന്നുചേർന്നു. ഇത്തരം ജ്യാമിതീയ പ്രശ്നങ്ങളിൽ ബീജഗണിതത്തിന്റെ ഉപയോഗം കണ്ടെത്തിയത് ഫ്രഞ്ചു ഗണിതജ്ഞരായ ദെക്കാർത്തെ (1596-1650)യും ഫെർമ (1601-65)യുമായിരുന്നു. ഇവരാണ് അനലിറ്റിക്ക് ജ്യോമട്രി (കാർട്ടീഷ്യൻ ജ്യോമട്രി)യുടെ ഉപജ്ഞാതാക്കൾ. ഇതിൽ ജ്യാമിതീയാശയങ്ങളെ ബീജഗണിതവുമായി സമന്വയിപ്പിച്ച് വക്രങ്ങളുടെ സമവാക്യങ്ങൾ (equations) എഴുതുന്നു. സമതലത്തിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിനെക്കുറിക്കാൻ സംഖ്യകളുടെ ക്രമിതയുഗ്മവും (ordered pair) സ്പേസിലാണെങ്കിൽ ക്രമിതത്രികവും (ordered triplet) ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഉദാ. (x, y) ഒരു ബിന്ദുവിനെ കുറിക്കുന്നു എങ്കിൽ ആദ്യസംഖ്യ x-നിർദേശാങ്കം: ബിന്ദുവിന് y അക്ഷത്തിൽ നിന്നുള്ള അകലം; രണ്ടാം സംഖ്യ y - നിർദേശാങ്കം: ബിന്ദുവിന് x അക്ഷത്തിൽ നിന്നുള്ള അകലം. മൂലബിന്ദു(origin)വിൽ നിന്ന് (x,y) എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ അകലമാണ് $\sqrt{x^2 + y^2}$. കേന്ദ്രം മൂലബിന്ദുവും ആരം (radius) r- ഉം ആയ ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഏതെങ്കിലും ബിന്ദുവിന്റെ നിർദേശാങ്കങ്ങൾ (x,y) ആയാൽ $x^2 + y^2 = r^2$ എന്നു കിട്ടുന്നു. നിർദേശാങ്കങ്ങളുടെ പരസ്പരബന്ധം കുറിക്കുന്ന ഈ ബീജീയ സമവാക്യമാണു വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം അഥവാ സമീകരണം (equation). ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽ നിന്നും ഒരു നിർദിഷ്ടരേഖയിൽ നിന്നുമുള്ള അകലങ്ങളുടെ അനുപാതം സ്ഥിരസംഖ്യയാകത്തക്ക വണ്ണം ഒരു ബിന്ദു ചലിച്ചാൽ അതിന്റെ ബിന്ദുപഥത്തെ കോണികം (conic) അല്ലെങ്കിൽ കോണികപരിച്ഛേദം (conic section) എന്നു പറയുന്നു. നിശ്ചിത ബിന്ദു കോണികത്തിന്റെ ഫോക്കസും നിർദിഷ്ടരേഖ ഡയറിട്രിക്സും ആണ്. സ്ഥിരസംഖ്യയായ അനുപാതമാണ് കോണികത്തിന്റെ ഉൾകേന്ദ്രത(eccentricity). ഈ ഉൾകേന്ദ്രത ഒന്നോ, ഒന്നിൽ കുറവോ, ഒന്നിൽ കൂടുതലോ ആകുന്നതനുസരിച്ചു കിട്ടുന്ന വക്രങ്ങളെ യഥാക്രമം പരാബൊള, എലിപ്സ്, ഹൈപർബൊള എന്നു വിളിക്കുന്നു. പീരങ്കിയിൽ നിന്നു ചീറിപ്പായുന്ന വെടിയുണ്ടയുടെ പഥം പരാബൊളയാണ്. സൗരയൂഥത്തിലെ ഗ്രഹങ്ങൾ സൂര്യനെ ചുറ്റുന്ന പഥം ദീർഘവൃത്തം (ellipse) ആണ്. സൂര്യൻ ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ ഒരു ഫോക്കസിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു.

ത്രിവിമീയ സ്പേസിൽ ഒരു ബിന്ദുവിനെ പ്രതിനിധീകരിക്കാൻ 3 സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. x, y, z നിർദേശാങ്കങ്ങളായ ബിന്ദുവിന് മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള അകലം $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ആണ്. $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ എന്നത് ഗോളത്തിന്റെയും $ax + by + cz + d = 0$ എന്നത് സമതലത്തിന്റെയും സമീകരണങ്ങളാണ്.

(iii) **അവകല ജ്യാമിതി** (Differential Geometry). ഈ ശാഖയിൽ അവകലഗണിത (Differential Calculus)ത്തിലെ ആശയങ്ങൾ വ്യാപകമായി ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഇതിൽ വക്രങ്ങളുടെ മൗലിക ഗുണധർമങ്ങളായ ചരിവ് (slope), വക്രത (curvature) എന്നിവയ്ക്കു പുറമേ സ്പേസ് വക്രങ്ങൾ, അവ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഏറ്റവും ചെറിയ വിസ്തീർണമുള്ള പ്രതലങ്ങൾ, ജിയോഡസിക്കുകൾ എന്നിവയെക്കുറിച്ചു പ്രതിപാദിക്കുന്നു. ഫ്രഞ്ച് ഗണിതജ്ഞൻ ഗാസ്പാർഡ് മോംഗ്, ജർമൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻ കാൾ ഫ്രീഡ്റിക് ഗൗസ് എന്നിവരാണ് ഈ വിഭാഗത്തിലെ ആദ്യകാല ഗവേഷകർ. അവകലജ്യാമിതി 19-ഉം 20-ഉം ശ.-ങ്ങളിൽ സജാതീയ (Affine), പ്രക്ഷേപീയ (Projective), സമാകല (integral) ജ്യാമിതികളിലേക്കു വികസിക്കുകയും ചെയ്തിട്ടുണ്ട്.

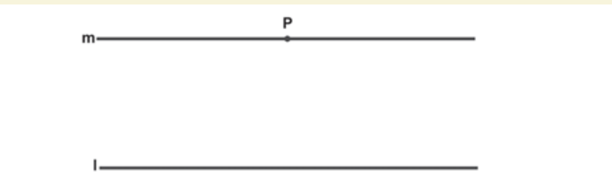
(iv) **വിവരണാത്മക ജ്യാമിതി** (Descriptive Geometry). ശില്പികളും എൻജിനീയർമാരും ഉപയോഗം കണ്ടെത്തുന്ന ജ്യാമിതീയ വിഭാഗമാണിത്. ഗാസ്പാർഡ് മോംഗാണ് ഇതിന്റെ ഉപജ്ഞാതാവ്. പ്രക്ഷേപം എന്ന തത്ത്വമുപയോഗിച്ച് ചിത്രങ്ങൾ വരയ്ക്കേണ്ട രീതി ഇതിൽ ചർച്ച ചെയ്യുന്നു. കെട്ടിടനിർമിതിയിൽ പ്ലാൻ, എലിവേഷൻ എന്നിവ തയ്യാറാക്കാൻ ഇതുപകരിക്കുന്നു. ദർശനകോടി (perspective), ലംബിക പ്രക്ഷേപം (orthographic projection) എന്നിവ വിവരണാത്മക ജ്യാമിതിയിലെ പ്രധാന ആശയങ്ങളാണ്. ചിത്രകാരന്മാരായ ലിയോനാർഡോ ഡാവിഞ്ചിയും ആൽബ്രെഹ്ത് ഡൂററും ഈ രംഗത്തു പ്രവർത്തിച്ചവരാണ്.

(v) **അയൂക്ലീഡിയൻ പശ്ചാത്തലം** (The non-Euclidean background). അഭിഗൃഹീതങ്ങളെ ആധാരമാക്കി രചിച്ച, നൂറ്റാണ്ടുകൾ പഴക്കമുള്ള ജ്യാമിതീയ ശാഖയാണ് യൂക്ലീഡിയൻ ജ്യാമിതി. യൂക്ലിഡിന്റെ 5-ാം ആക്സിയം 'സമാന്തര ആക്സിയം (axiom on parallels)' എന്നറിയപ്പെടുന്നത് ഇതാണ്.



'n എന്ന നേർവര l, m എന്നീ നേർവരകളെ ഖണ്ഡിക്കുമ്പോൾ നേർവരയുടെ ഒരു വശത്തുണ്ടാകുന്ന അന്തഃകോണങ്ങളുടെ ആകെത്തുക 180°-യിൽ കുറവാണെങ്കിൽ, n എന്ന നേർവരയുടെ ഏതു വശത്താണോ അന്തഃകോണങ്ങൾ, ആ വശത്ത് l, m എന്നീ നേർവരകൾ കൂട്ടിമുട്ടും'.

പല യൂക്ലീഡിയൻ പ്രമേയങ്ങളും തെളിയിക്കുന്നത് ഈ ആക്സിയം ഉപയോഗിച്ചാണ്. ഉദാ. ഒരു ത്രികോണത്തിലെ 3 കോണങ്ങളുടെ തുക 180° ആയിരിക്കും. സ്വയംസിദ്ധമല്ല എന്ന കാരണത്താൽ 18-ാം ശ.-ത്തിനുശേഷം ഗണിതജ്ഞർക്കു സമാന്തര ആക്സിയത്തിൽ പൊരുത്തക്കേടു തോന്നി. പ്ലേഫെയർ ഇതിനു പകരം പുതിയൊരു ആക്സിയം നിർദേശിച്ചു.

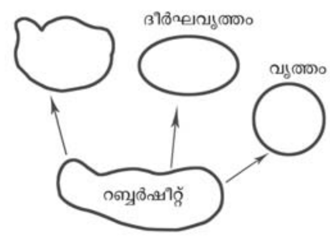


'l എന്നതു തന്നിട്ടുള്ള നേർവരയും, P അതിൽ ഇല്ലാത്ത ഒരു ബിന്ദുവും ആണെങ്കിൽ അവയുടെ തലത്തിൽ P യിൽക്കൂടി പോകുന്നതും l-നോടു കൂട്ടിമുട്ടാത്തതുമായ ഒരൊറ്റ നേർവര m മാത്രമേയുള്ളു'. സമാന്തരരേഖകളെക്കുറിച്ച് എളുപ്പത്തിൽ ഒരവബോധം ഉളവാക്കിയ ഈ ആക്സിയവും ഇതിനുശേഷം വച്ച എല്ലാ പകര ആക്സിയങ്ങളും നിരാകരിക്കപ്പെട്ടു.

സമാന്തര ആക്സിയത്തിൽ നിന്നും തികച്ചും വിഭിന്നമായ ഒരു ആക്സിയവുമായി ഗൗസ് രംഗത്തുവന്നു. 'l എന്നത് ഒരു നേർവരയും P-യിൽക്കൂടി പോകുന്നതും l-നോടു കൂട്ടിമുട്ടാത്തതുമായ അസംഖ്യം നേർവരകളുണ്ട്'. ഈ ആക്സിയവും യൂക്ലിഡിന്റെ മറ്റ് 9 ആക്സിയങ്ങളും ഉപയോഗിച്ച് അദ്ദേഹം പല പുതിയ പ്രമേയങ്ങളും തെളിയിച്ചു. ഈ ജ്യാമിതിക്ക് ഗൗസ് 'അയൂക്ലീഡിയൻ ജ്യാമിതി' എന്നു പേരിട്ടു. ഈ ജ്യാമിതിയനുസരിച്ച് ഒരു ത്രികോണത്തിലെ കോണങ്ങളുടെ ആകെത്തുക 180°-യിൽ കുറവാണ്. പ്രഥമവീക്ഷണത്തിൽ ഇത് അബദ്ധജടിലമാണെന്നു തോന്നിയേക്കാം. ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തൃതിയനുസരിച്ച് കോണങ്ങളുടെ ആകെത്തുകയിലും വ്യത്യാസം വരുന്നു. വിസ്തീർണം പൂജ്യത്തെ സമീപിക്കുമ്പോൾ തുക 180°-യോട് അടുക്കും. സാധാരണ നാം ഉപയോഗിക്കുന്ന ത്രികോണങ്ങൾ ചെറുതായിരിക്കും. അളക്കാനുപയോഗിക്കുന്ന ഉപകരണങ്ങളുടെ പിശകുകൾ (errors) കൂടി പരിഗണിക്കുമ്പോൾ തുക 180°-യോട് അടുത്തുമാത്രമേ വരൂ എന്നു കാണാം. ഇതുതന്നെയാണ് ഗൗസ് സിദ്ധാന്തിക്കുന്നതും. അയൂക്ലീഡിയൻ ജ്യാമിതിയെ സംബന്ധിച്ച നിഗമനങ്ങളൊന്നും തന്നെ ഗൗസ് സ്വന്തം ജീവിതകാലത്ത് പ്രസിദ്ധീകരിച്ചില്ല. റഷ്യയിലെ നിക്കൊളായ് ലൊബാഷ്യേവ്സ്കിയുടെയും ഹംഗറിയിലെ യാനോസ്ബൊല്യായുടെയും പേരിലാണ് അയൂക്ലീഡിയൻ ജ്യാമിതി പൊതുവെ അറിയപ്പെടുന്നത്. ലൊബാഷ്യേവ്സ്കി 1931-ലും ബൊല്യായി 1936-ലും സ്വതന്ത്രമായി ഗവേഷണഫലങ്ങൾ പ്രസിദ്ധീകരിക്കുകയായിരുന്നു. ഇന്ന് ഹൈപർബൊളിക ജ്യാമിതി എന്ന പേരിലും ഈ ശാഖ അറിയപ്പെടുന്നു.

(vi) **റീമാനിയൻ ജ്യാമിതി** (Riemanian Geometry). ഗൗസിന്റെ ശിഷ്യനായ ഫ്രീഡ്റിഹ് ബെൺഹാർഡ് റീമാൻ (1826-66) യൂക്ലിഡിന്റെ പല ആക്സിയങ്ങളെയും ചോദ്യം ചെയ്തു. ഒരു നേർവര അനന്തമായി നീണ്ടുപോകുന്നു എന്ന യൂക്ലീഡിയൻ ആക്സിയത്തിനെതിരായി ഭൗതിക സ്പേസിലെ ഒരു നേർവര ഒരിക്കലും അനന്തതയിലേക്കു പോകുന്നതായി അനുഭവപ്പെടുന്നില്ല എന്നദ്ദേഹം പ്രസ്താവിച്ചു. ഒരു രേഖ അവസാനിക്കുന്നില്ല എന്നതു മാത്രമാണ് ഭൗതിക സത്യം. ഉദാ. ഭൂമധ്യരേഖ. അതായത് ഒരു രേഖ അവസാനമില്ലാത്തതാണെന്നോ (endless) പരിബദ്ധമാണെന്നോ (unbounded) പറയാമെന്നു മാത്രം. സമാന്തരരേഖകളില്ലെന്നു സങ്കല്പിച്ച് യൂക്ലീഡിയൻ ജ്യാമിതിയിലെ ആക്സിയം മാറ്റിയെഴുതി റീമാൻ നിർമിച്ച മറ്റൊരു അയൂക്ലീഡിയൻ ജ്യാമിതിയാണ് ദീർഘവൃത്തീയ ജ്യാമിതി(Elliptic Geometry). ഈ ജ്യാമിതിപ്രകാരം ഒരു ത്രികോണത്തിലെ 3 കോണങ്ങളുടെ ആകെത്തുക 180°യിൽ കൂടുതലാണ്. ദൂരം (distance) എന്നത് മാറിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു ചരരാശി (variable) ആണെന്നാണ് റീമാന്റെ കാഴ്ചപ്പാട്. കലന(Calculus)ത്തിന്റെ സാധ്യതകളും അവകലജ്യാമിതിയുടെ രീതികളും റീമാനിയൻ ജ്യാമിതിയിൽ അവലംബിച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ ജ്യാമിതീയ വിഭാഗത്തിനു പ്രാധാന്യം കൈവന്നത് 1915-ൽ ആൽബർട്ട് ഐൻസ്റ്റൈൻ ആപേക്ഷികസിദ്ധാന്തം അവതരിപ്പിച്ചതോടെയാണ്. ഐൻസ്റ്റൈൻ ഉപയോഗിച്ച ചതുർവിമീയ സ്പേസ്-റ്റൈം ജ്യാമിതിയിൽ ദൂരങ്ങളെ സംബന്ധിച്ച ഫോർമുല റീമാനിയൻ ജ്യാമിതിയിലെന്നപോലെ ഒരു ചരരാശിയാണ്.

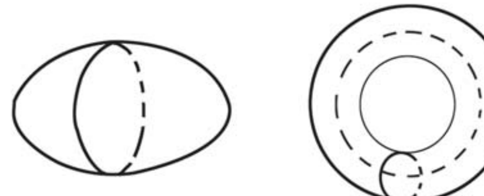
(vii) **ടോപോളജി**. ജ്യാമിതിയുടെ ശാഖയായ ടോപോളജി 19-ാം ശ.-ത്തിലാണു രൂപപ്പെട്ടത്. ഓയ്ലർ (Euler), റീമാൻ, പാൻകറെ, കാന്റർ തുടങ്ങിയ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞർ ഈ ശാഖയിൽ സംഭാവനകൾ നല്കിയിട്ടുണ്ട്. വിരൂപണം (deformation) കൊണ്ട്, അതായത് വലിച്ചുനീട്ടൽ, വളയ്ക്കൽ, ചുക്കിച്ചുളിയൽ മുതലായവകൊണ്ട്, വസ്തുവിന്റെ മാറ്റം വരാത്ത ഗുണധർമങ്ങ



ളുടെ പഠനമാണു ടോപോളജി. 'റബ്ബർഷീറ്റ് ജ്യോമട്രി' എന്ന പേരിലും ഇതറിയപ്പെടുന്നു.

ചിത്രം (3)-ൽ വിരലുകൊണ്ട് റബ്ബർഷീറ്റിൽ ഉണ്ടാക്കിയിരിക്കുന്ന വിരൂപണങ്ങൾ ശ്രദ്ധിക്കുക. ഇത്തരം വിരൂപണത്തിൽ അവശ്യം പാലിക്കേണ്ട വ്യവസ്ഥകൾ നിഷ്കർഷിച്ചിട്ടുണ്ട്.

ടോപോളജിയിൽ ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളുടെ വളരെ സാമാന്യമായ ഗുണധർമങ്ങൾ മാത്രമേ പഠനവിധേയമാക്കുന്നുള്ളു. യൂക്ലീഡിയൻ ജ്യാമിതിയുമായുള്ള സുപ്രധാനമായ ഒരു വ്യത്യാസമാണിത്. ടോപോളജിയിൽ ഒരു വൃത്തത്തെ ദീർഘവൃത്തം കൊണ്ടോ ഗോളത്തെ അണ്ഡാകൃതിയിലുള്ള രൂപം കൊണ്ടോ പ്രതിസ്ഥാപിക്കാം. എന്നാൽ ഗോളവും സൈക്കിൾട്യൂബ് പോലുള്ള ടോറസ് (torus) എന്ന പ്രതലവും തമ്മിൽ അന്തരമുണ്ട്. വിരൂപണപ്രക്രിയകൾകൊണ്ടു കിട്ടുന്ന രൂപമാറ്റങ്ങൾ ടോപോളജീയമായി തുല്യമാനമെന്നോ (topologically equivalent) ഹോമിയോമോർഫികമെന്നോ പറയുന്നു. വൃത്തവും ചതുരവും ടോപോളജീയമായി തുല്യമാനമാണ്. എന്നാൽ ഒരു വൃത്തത്തെ വളച്ചൊടിച്ചോ ചുക്കിച്ചുളിച്ചോ കിട്ടുന്ന എട്ട് (8) എന്ന അക്കത്തിന്റെ ആകൃതി വൃത്താകൃതിയുമായി ടോപോളജീയമായി തുല്യമാനമല്ല.



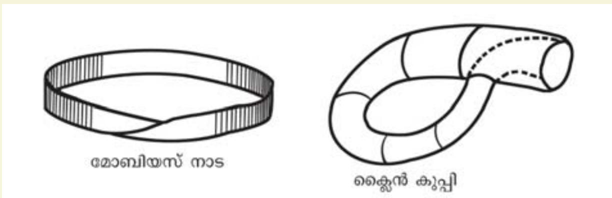
ദീർഘവൃത്തജം

ടോറസ്

ഗോളത്തിന്റെയോ ദീർഘവൃത്തജത്തിന്റെയോ പുറത്ത് ഒരു സംവൃതവക്രം വരയ്ക്കുമ്പോൾ അതിനുള്ളിൽ എപ്പോഴും വിസ്തീർണമുള്ള ഒരു ഭാഗം വേർതിരിയുന്നു. എന്നാൽ ഒരു ടോറസിനു പുറത്ത് വിസ്തീർണമുള്ള ഭാഗം വേർതിരിയാത്ത രണ്ടു

സംവൃതവക്രങ്ങൾ വരയ്ക്കാവുന്നതാണ് (ചിത്രം 4). അതുകൊണ്ട് ഗോളവും (ദീർഘവൃത്തവും) ടോറസും ടോപോളജീയമായി തുല്യ മാനമല്ല.

നമുക്കു ചുറ്റുമുള്ള ഭൗതികവസ്തുക്കളുടെ ചിത്രണമായ യൂക്ലീഡിയൻ ജ്യാമിതിയിൽ എല്ലാ വസ്തുക്കൾക്കും രണ്ടു വശ മുണ്ട്. അതായത് ഒരു അകവശവും ഒരു പുറവശവും. എന്നാൽ ഒരു വശം മാത്രമുള്ള പ്രതലങ്ങളെ ടോപോളജിസ്റ്റുകൾ അവത രിപ്പിക്കുന്നു.



ചിത്രം (5)ലെ മോബിയസ് നാടയും ക്ലൈൻകുപ്പിയും ഒരു വശം മാത്രമുള്ള പ്രതലങ്ങളാണ്.

ടോപോളജിക്കുള്ള ഒരു മുഖവുര മാത്രമേ ഇവിടെ കൊടു ത്തിട്ടുള്ളു. ഗണിതശാസ്ത്രത്തിൽ സ്പേസ് എന്ന വാക്ക് വളരെ അമൂർത്ത(abstract)മായ ഒരാശയത്തെയാണ് കുറിക്കുന്നത്. 19-ാം ശ.-ത്തിന്റെ അവസാനത്തോടെ പലതരത്തിലുള്ള സ്പേസുകളും അവയുടെ ഗുണധർമങ്ങളും ആവിഷ്കരിക്കപ്പെട്ടു. ആധുനിക ഗണിതം സമ്മിശ്രവും അമൂർത്തവുമായി മാറിക്കൊണ്ടിരിക്കു മ്പോൾ അമൂർത്തങ്ങളായ ആശയങ്ങൾക്കു മുൻതൂക്കം ലഭിക്കുന്നു. എല്ലാവിധ സ്പേസുകളുടെയും പൊതുവായ ഗുണധർമങ്ങൾ കണക്കിലെടുത്ത് ജ്യാമിതീയാശയങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് സ്പേസു കളുടെ ഒരു അടിസ്ഥാനസിദ്ധാന്തത്തിനു ഫ്രഞ്ചുഗണിതജ്ഞ നായ മോറിസ് ഫ്രെഷറ്റ് (1878-1973) രൂപം കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്. 'അമൂർത്ത സ്പേസുകളുടെ സിദ്ധാന്തം (The theory of abstract spaces)' എന്ന പേരിൽ ഇതറിയപ്പെടുന്നു. ഫലനസ്പേസുകൾ അനന്തവിമീയങ്ങളാണ്. ഫലനത്തെക്കുറിച്ചുള്ള സിദ്ധാന്തങ്ങളിൽ ജ്യാമിതീയമായ ഉൾക്കാഴ്ച അവയുടെ സങ്കീർണസ്വഭാവത്തിന് അയവു വരുത്തുന്നതിനാൽ സ്പേസുകളുടെ പഠനം എളുപ്പമാ കുന്നു. ആധുനിക ഗണിതജ്ഞരുടെ വീക്ഷണത്തിൽ ഹോമിയോ മോർഫിക രൂപാന്തരണം കൊണ്ട് മാറ്റമില്ലാതെ തുടരുന്ന (നിശ്ച രമാകുന്ന) സ്പേസിലെ ഗുണധർമങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനമാണു ടോപോളജി.

III. **യൂക്ലീഡിയൻ ജ്യാമിതി** (Euclidean Geometry). ഗ്രീക്കു ഗണിതജ്ഞരുടെ സുപ്രധാന നേട്ടങ്ങളിലൊന്ന് നിഗമനങ്ങളി ലൂടെ അവർ അവതരിപ്പിച്ച ജ്യാമിതിയാണ്. യൂക്ലീഡിന്റെ *എലി മെന്റ്സ്* എന്ന ഗ്രന്ഥം ജ്യാമിതീയ പഠനങ്ങളുടെ പ്രമാണഗ്രന്ഥ മാണ്. 13 ഭാഗങ്ങളാണ് ഈ ഗ്രന്ഥത്തിനുള്ളത്. നേർവര, ബിന്ദു, വൃത്തം, സമതലം, ഘനരൂപം എന്നിവയെക്കുറിച്ച് അറിയേണ്ട പല വിവരങ്ങളും തെളിവുകൾ സഹിതം ഇതിലുണ്ട്. 5 ആക്സി യങ്ങളും 5 പൊതുതത്ത്വങ്ങളും ആധാരമാക്കിയുള്ള, ബുദ്ധി പൂർവകമായ ചിന്താധാരയുടെ പരിണതഫലമാണ് യൂക്ലിഡിന്റെ പ്രമേയങ്ങൾ.

1. യൂക്ലിഡിന്റെ ആക്സിയങ്ങൾ

1. ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്നു മറ്റൊരു ബിന്ദുവിലേക്ക് ഒരു നേർവര വരയ്ക്കാം.

2. ഒരു നേർവരയിൽക്കൂടി തുടർച്ചയായി സാന്തമായ ഒരു നേർവര വരയ്ക്കാം.

3. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും അതിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവും തന്നാൽ വൃത്തം വരയ്ക്കാം.

4. എല്ലാ മട്ടകോണങ്ങളും തുല്യമായിരിക്കും.

5. ഒരു നേർവര രണ്ടു നേർവരകളെ ഖണ്ഡിക്കുമ്പോൾ നേർവ രയുടെ ഒരു വശത്തുണ്ടാകുന്ന അന്തഃകോണങ്ങളുടെ ആകെ ത്തുക 180°യിൽ കുറവാണെങ്കിൽ, നേർവരയുടെ ഏതു വശ ത്താണോ അന്തഃകോണങ്ങൾ, ആ വശത്ത് രണ്ടു നേർവരകളും സന്ധിക്കും.

യൂക്ലിഡിന്റെ പൊതുതത്ത്വങ്ങൾ:

1. ഒരു വസ്തുവിനോടു തുല്യങ്ങളായ വസ്തുക്കളെല്ലാം അന്യോന്യം തുല്യങ്ങളാണ്.

2. തുല്യങ്ങളോടു തുല്യങ്ങൾ കൂട്ടുമ്പോഴുണ്ടാകുന്ന തുക കൾ തുല്യങ്ങളാണ്.

3. തുല്യങ്ങളിൽ നിന്നു തുല്യങ്ങൾ കുറച്ചാലുണ്ടാകുന്ന ഫല ങ്ങൾ തുല്യങ്ങളായിരിക്കും.

4. സംപതിക്കുന്ന (coincide) വസ്തുക്കൾ തുല്യങ്ങളായി രിക്കും.

5. പൂർണങ്ങൾ ഭാഗങ്ങളെക്കാൾ വലുതാണ്.

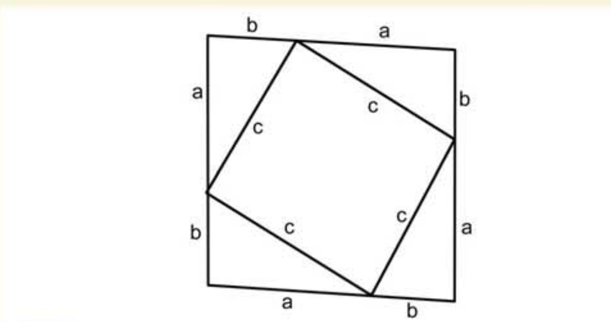
2. **സമതല ജ്യാമിതി** (Plane Geometry). *എലിമെന്റ്സി*ലെ 13 ഭാഗങ്ങളിൽ ആദ്യ ആറുഭാഗങ്ങൾ സമതലജ്യാമിതിയെക്കു റിച്ചും പിന്നീടുള്ള 4 ഭാഗങ്ങൾ സംഖ്യകളുടെയും ദൂരങ്ങളുടെയും ഗുണധർമങ്ങളെക്കുറിച്ചും അവസാന 3 എണ്ണം ഘനജ്യാമിതിയെ ക്കുറിച്ചും പ്രതിപാദിക്കുന്നു. ജ്യാമിതീയ സങ്കല്പങ്ങൾക്ക് അടി സ്ഥാനമിടുന്ന ബിന്ദു, രേഖ, തലം, വൃത്തം, പ്രതലം തുടങ്ങിയ വയെ നിർവചിച്ചുകൊണ്ടാണു യൂക്ലിഡ് പ്രമേയങ്ങളിലേക്കു കട ക്കുന്നത്. ഇന്ന് ഈ പദങ്ങൾക്കു നിർവചനം കൊടുക്കാറില്ല.

സമതലജ്യാമിതിയിൽ രേഖാഖണ്ഡം (line segment), കോണം (angle), ത്രികോണം (triangle), ബഹുഭുജം (polygon), കോണിക പരിച്ഛേദം (conic section) എന്നിവയെക്കുറിച്ചുള്ള യൂക്ലിഡിന്റെ പഠനങ്ങൾ പ്രാധാന്യമർഹിക്കുന്നു. ഒരു ഋജുരേഖയിൽ തന്നി ട്ടുള്ള രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും രേഖാ ഖണ്ഡത്തിൽ ഉൾപ്പെടുന്നു. രേഖാഖണ്ഡത്തിന് രണ്ട് അറ്റബിന്ദു ക്കൾ ഉണ്ട് എന്നതും അതു രേഖയെപ്പോലെ രണ്ടുവശങ്ങളി ലേക്കും നീണ്ടുപോകുന്നില്ല എന്നതുമാണ് രേഖാഖണ്ഡവും രേഖയും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം. രശ്മി (ray) ആകട്ടെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ തുടങ്ങുകയും ഒരു ദിശയിലേക്കു നീണ്ടുപോകു കയും ചെയ്യുന്നു. രണ്ടു രശ്മികൾക്കു പൊതുവായ ഒരു അറ്റ ബിന്ദു ഉണ്ടെങ്കിൽ, അവയിലെ അറ്റബിന്ദു ഉൾപ്പെടെയുള്ള ബിന്ദു ക്കളുടെ ഗണമാണ് കോണം (angle). സമീപസ്ഥകോണങ്ങൾ തുല്യമാകത്തക്കവണ്ണം രണ്ടു രേഖകൾ കൂട്ടിമുട്ടുമ്പോൾ, ഈ കോണങ്ങളെ ലംബകോണങ്ങൾ അഥവാ മട്ടകോണങ്ങൾ (right angles) എന്നു പറയുന്നു. ഇതിന്റെ ഡിഗ്രിയിലുള്ള അളവ് 90° യും റേഡിയനിലുള്ളത് $\frac{\pi}{2}$ ഉം ആകുന്നു. 3 അസമരേഖാ (non-collinear) ബിന്ദുക്കളും അവയെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡ ങ്ങളും ചേർന്നതാണ് ത്രികോണം. ഇതിലെ കോണങ്ങളുടെ ആകെ ത്തുക 180° ആണ്. 4 വശങ്ങളുള്ള ബഹുഭുജത്തെ ചതുർഭുജം (quadrilateral) എന്നു പറയുന്നു.

ഒരു സമതലം ലംബവൃത്തീയ കോണികപ്രതലത്തെ (right circular cone) പ്രതിച്ഛേദിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന വക്രങ്ങളെ കോണിക പരിച്ഛേദങ്ങൾ (conic sections) എന്നു പറയുന്നു. കോണികപ്ര തലത്തിന്റെ അക്ഷത്തിനു ലംബമായി സമതലം പ്രതിച്ഛേദിക്കു

മ്പോൾ കിട്ടുന്നതാണു വൃത്തം. സമതലം, കോണിക പ്രതലത്തിന്റെ രണ്ടു പകുതികളെയും (nappens) ഒന്നിച്ചു പ്രതിച്ഛേദിക്കുമ്പോൾ ഹൈപർബൊള കിട്ടുന്നു. എന്നാൽ സമതലം, കോണിക പ്രതലത്തിന്റെ ഒരു പകുതിക്കു സമാന്തരമാണെങ്കിൽ അതു മറ്റേ പകുതിയെ പ്രതിച്ഛേദിക്കുന്ന വക്രമാണു പരാബൊള. സമതലം, കോണികപ്രതലത്തിന്റെ ഒരു പകുതിക്കു സമാന്തരമോ അക്ഷത്തിനു ലംബമോ അല്ലെങ്കിൽ കിട്ടുന്ന പ്രതിച്ഛേദ വക്രമാണ് എലിപ്സ്.

3. **പ്രമേയങ്ങളും തെളിവുകളും**. *എലിമെന്റ്സി*ലെ ആദ്യ ഭാഗത്തിലെ 47-ാം പ്രമേയമായ പിഥഗറസ് പ്രമേയം യൂക്ലിഡിന്റെ പ്രമേയങ്ങളിൽ പ്രാധാന്യമർഹിക്കുന്നു. ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിൽ, കർണത്തിന്റെ വർഗം മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുകയ്ക്കു തുല്യമാണ് എന്നതാണ് ഈ പ്രമേയം. അമേരിക്കൻ ഗണിതജ്ഞനായ ലൂമിസ്, പിഥഗറസ് പ്രമേയത്തിന്റെ 366 വ്യത്യസ്ത തെളിവുകൾ സമാഹരിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഇതിൽ ഏറ്റവും ലഘുവായ ഒരു തെളിവ് ചിത്രം 7-ൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.



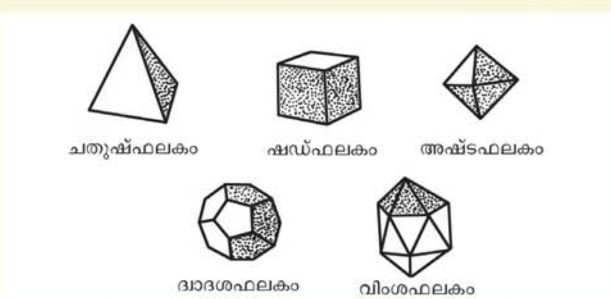
ഇവിടെ $4.\ \frac{1}{2}ab + c^2 = (a+b)^2$

ലഘൂകരിച്ചാൽ $c^2 = a^2 + b^2$ എന്നു കിട്ടുന്നു.

4. **നിർമിതികൾ**. റൂളറും കോമ്പസസും മാത്രം ഉപയോഗിച്ച ജ്യാമിതീയ നിർമിതികളിലായിരുന്നു ഗ്രീക്കുകാർക്കു താത്പര്യമുണ്ടായിരുന്നത്. എന്നാൽ ഇവകൊണ്ട് ഉത്തരം കിട്ടാത്ത 3 നിർമാണപ്രശ്നങ്ങൾ നിലനിന്നു: (1) ക്യൂബ് ഇരട്ടിപ്പിക്കൽ, (2) വൃത്തത്തെ സമചതുരമാക്കൽ, (3) കോണത്തിന്റെ സമത്രിഭാജനം.

അതായത് $\sqrt[3]{2}a, \sqrt{\pi}\,a, \frac{\theta}{3}$ ഇവ എങ്ങനെ വരയ്ക്കാം എന്നുള്ളതാണ് ഈ പ്രശ്നങ്ങൾ. ഇന്ന്, ആധുനിക ബീജഗണിതവും വിശ്ലേഷണവും ഉപയോഗിച്ച് ഈ നിർമിതികൾ അസാധ്യമാണെന്ന് തെളിയിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്.

5. **ഘന ജ്യാമിതി** (Solid Geometry). *എലിമെന്റ്സി*ന്റെ അവസാന 3 ഭാഗങ്ങൾ ഘനജ്യാമിതിയിലെ സമതലം, പിരമിഡ്, കോൺ, സിലിണ്ടർ, ബഹുഫലകം (polyhedron) തുടങ്ങിയവയെക്കുറിച്ചുള്ള പ്രമേയങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്നുണ്ട്. ബഹുഭുജങ്ങൾ പാർശ(face)ങ്ങളായുള്ള ഘനരൂപങ്ങളാണ് ബഹുഫലകങ്ങൾ. ചിത്രം (8)-ൽ അവ വിശദമായി ചേർത്തിരിക്കുന്നു.

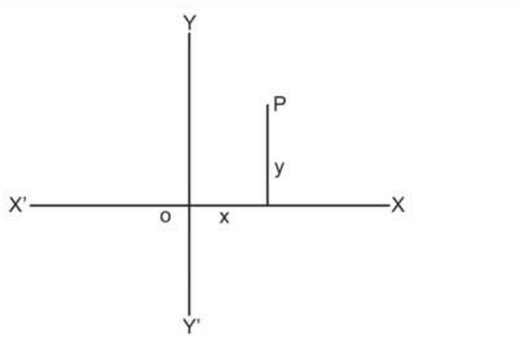


ഭൗതിക സ്പേസിൽ ആകെ 5 സമബഹുഫലകങ്ങൾ മാത്രമേ ഉള്ളൂ. അവയെ 'പ്ലേറ്റോണിക് ഘനരൂപങ്ങൾ' എന്നു വിളിക്കുന്നു. *എലിമെന്റ്സ്* അവസാനിക്കുന്നത് അവയുടെ നിർമിതിയെക്കുറിച്ചുള്ള പ്രതിപാദനത്തോടെയാണ്.

6. **അമൂർത്തമായ യൂക്ലീഡിയൻ ജ്യാമിതി**. 19-ാം ശ.-ത്തിന്റെ അവസാനത്തോടെ നൂറ്റാണ്ടുകൾ പഴക്കമുള്ള യൂക്ലീഡിയൻ ജ്യാമിതിയിൽ പുതുമകൾ ഉൾക്കൊള്ളിക്കാൻ തുടങ്ങി. 1899-ൽ ജർമൻ ഗണിതശാസ്ത്രകാരനായ ഹിൽബെർട്ട് പ്രസിദ്ധീകരിച്ച ഗ്രന്ഥത്തോടെ യൂക്ലിഡിന്റെ ക്ലാസ്സിക്കൽ ജ്യോമട്രി പൂർണമായി നവീകരിക്കപ്പെട്ടു. നിർവചിക്കാത്ത 6 പദങ്ങളുൾക്കൊള്ളുന്ന 21 ആക്സിയങ്ങളോടെ തുടങ്ങി ജ്യാമിതിയെ അമൂർത്തവത്കരിച്ച അദ്ദേഹത്തിന്റെ ചിന്താപദ്ധതിക്ക് അംഗീകാരം ലഭിച്ചത് 20-ാം ശ.-ത്തിലാണ്.

IV. **വിശ്ലേഷക ജ്യാമിതി** (Analytical Geometry). യൂക്ലീഡിയൻ ജ്യാമിതിയിൽ ബീജഗണിത ആശയങ്ങൾ സന്നിവേശിപ്പിച്ച് വിശ്ലേഷക ജ്യാമിതി രൂപപ്പെടുത്തിയത് ഫ്രഞ്ചു ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ ദെക്കാർത്തെയും ഫെർമയും ആണ്. സ്പേസിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനം നിർണയിക്കാൻ സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കാമെന്നുള്ളതാണ് വിശ്ലേഷക ജ്യാമിതിയുടെ അടിസ്ഥാന സങ്കല്പം.

സമതല വിശ്ലേഷക ജ്യാമിതിയിൽ സമതലത്തെ പരസ്പരം ലംബമായ x, y അക്ഷങ്ങൾ 4 ആയി ഭാഗിക്കുന്നു. ഓരോ ഭാഗത്തിനും ചതുർത്ഥാംശം (quadrant) എന്നു പറയുന്നു.



x - y തലത്തിലെ P എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ നിർദേശാങ്കങ്ങളാണ് (x, y). ഈ ബിന്ദുവിനെ P (x, y) എന്നു കുറിക്കുന്നു. x, y ഇവയെ കാർട്ടീഷ്യൻ നിർദേശാങ്കങ്ങൾ (cartesian co-ordinates) എന്നു പറയുന്നു. മൂലബിന്ദുവിന്റെ നിർദേശാങ്കങ്ങൾ (0, 0). $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ എന്നിവ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളാണെങ്കിൽ PQ എന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ നീളം പിഥഗറസ് പ്രമേയമുപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കാം.

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

1. **നേർവരകൾ**. വിശ്ലേഷക ജ്യാമിതിയിൽ നേർവരകളെ സമീകരണങ്ങൾ (equations)കൊണ്ടു കുറിക്കുന്നു. x - അക്ഷത്തിലെ ബിന്ദുക്കളുടെ y - നിർദേശാങ്കം പൂജ്യം ആയിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് x - അക്ഷത്തെ y = 0 എന്ന സമീകരണംകൊണ്ടു പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. y - അക്ഷത്തിന്റെ സമീകരണമാണ് x = 0. x, y അക്ഷങ്ങൾക്കു സമാന്തരങ്ങളായ രേഖകളുടെ സമീകരണങ്ങളാണ് y = K, x = K (K - സ്ഥിരസംഖ്യ).

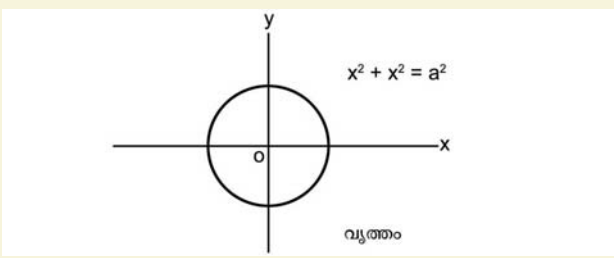
ഒരു നേർവര x - അക്ഷത്തെ ഛേദിക്കുമ്പോഴുണ്ടാകുന്ന ധനാത്മക കോണം θ ആയാൽ $\tan\theta$ യെ നേർവരയുടെ ചരിവുമാനം (slope) എന്നു പറയുന്നു. ഉദാ. $\theta = 60^\circ$ ആയാൽ വരയുടെ ചരിവുമാനം $\sqrt{3}$ ആണ്. ഒരു രേഖയുടെ ചരിവുമാനം m-ഉം y അന്തഃഖണ്ഡം c-യും ആയാൽ ആ രേഖയുടെ സമീകരണം $y = mx + c$ ആണ്. അതായത് രേഖയിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ബിന്ദു (x, y) ആണെങ്കിൽ x-ഉം y-യും തമ്മിൽ $y = mx + c$ എന്ന നിബ

ന്ധനയ്ക്കു വിധേയമായിരിക്കുന്നു. ഇങ്ങനെയുള്ള നിബന്ധനയെയാണ് സമീകരണം എന്നു പറയുന്നത്. (x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന നേർവരയുടെ സമീകരണമാണ്

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

ചരിവുമാനങ്ങൾ m_1, m_2 ആയ രണ്ടു രേഖകൾ ഛേദിക്കുമ്പോഴുണ്ടാകുന്ന കോണം θ ആയാൽ $\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$ എന്നു തെളിയിക്കാം. ഇതിൽനിന്ന്, രണ്ടു രേഖകൾ സമാന്തരമാണെങ്കിൽ $m_1=m_2$; ലംബങ്ങളായാൽ $m_1m_2=-1$. ഏതു നേർവരയുടെയും സാമാന്യ സമീകരണം $ax+by+c=0$ ആണ്.

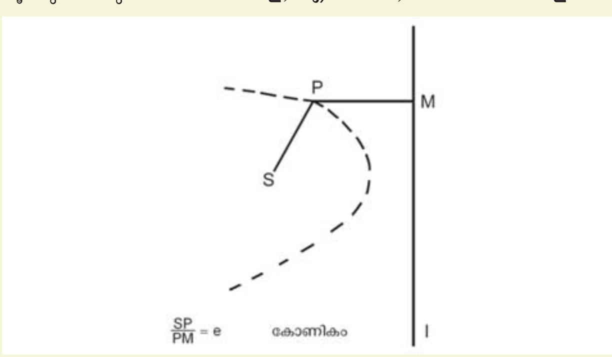
2. **വൃത്തം**. യൂക്ലീഡിയൻ ജ്യാമിതിയിൽ ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽ നിന്നു സ്ഥിരദൂരത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ ബിന്ദുപഥം (locus) ആണ് വൃത്തം. നിശ്ചിത ബിന്ദുവിനെ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം എന്നും സ്ഥിരദൂരത്തെ ആരം (radius) എന്നും പറയുന്നു. കേന്ദ്രം (h,k)യും ആരം r-ഉം ആയി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ സമീകരണമാണ് $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$. എല്ലാ വൃത്തങ്ങളുടെയും സമീകരണത്തിന്റെ പൊതുവായ രൂപമാണ് $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ എന്നത്. ഈ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം $=(-g,-f)$; ആരം $=\sqrt{g^2+f^2-c}$. വൃത്തത്തിന്റെ പ്രധാനമായ



വൃത്തം

ഒരു സവിശേഷത അതിന്റെ പരിധിയിലുള്ള ഏതൊരു ബിന്ദുവിലൂടെ വരയ്ക്കുന്ന സ്പർശരേഖ(tangent)യും അതേ ബിന്ദുവിലൂടെ വരയ്ക്കുന്ന ആരവും പരസ്പരം ലംബങ്ങളായിരിക്കും എന്നുള്ളതാണ്.

3. **കോണികങ്ങൾ** (Conics). ഒരു ലംബവൃത്തീയ കോണിനെ ഒരു സമതലം വ്യത്യസ്ത കോണങ്ങളിൽ ഛേദിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ഏതൊരു വക്രത്തിനെയും കോണികം എന്നു പറയുന്നു. ഇവ മൂന്നുവിധമുണ്ട്. പരാബൊള, എലിപ്സ്, ഹൈപർബൊള.



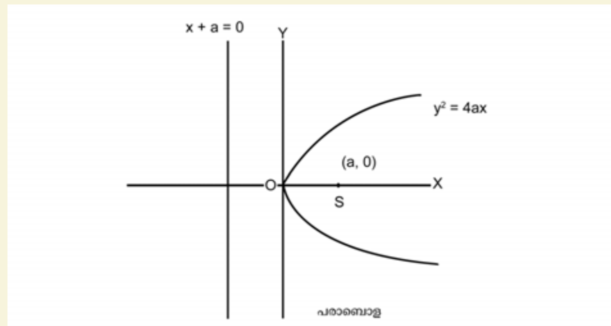
കോണികം

ചിത്രം 11-ൽ S ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവും l ഒരു നിശ്ചിത രേഖയും P ചലിക്കുന്ന ഒരു ബിന്ദുവും ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. P-യിൽ നിന്ന് l രേഖയിലേക്കുള്ള ലംബമാണ് PM. ബിന്ദു P ചലിക്കുന്നത് $\frac{SP}{PM}=e$ (സ്ഥിരാങ്കം) എന്ന നിബന്ധനയ്ക്കു വിധേയമായാണ്. അപ്പോൾ P-യുടെ ബിന്ദുപഥത്തെ കോണികം എന്നു പറയുന്നു.

ഇവിടെ S ഫോക്കസും l നിയതരേഖ (directrix)യും e ഉൾകേന്ദ്രത (eccentricity)യും ആണ്.

$e=1$ ആയാൽ കിട്ടുന്ന വക്രമാണു പരാബൊള. $e<1$ ആയാൽ എലിപ്സും $e>1$ ആയാൽ ഹൈപർബൊളയും കിട്ടുന്നു.

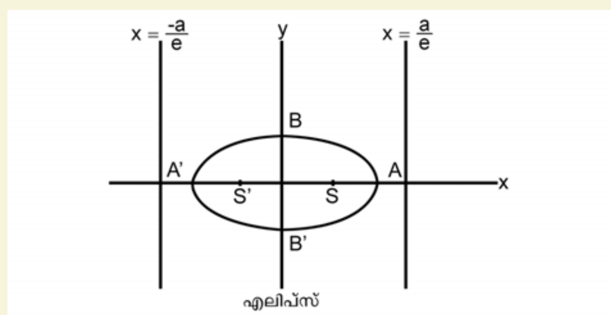
പരാബൊള. പരാബൊളയുടെ ഉൾകേന്ദ്രത $e=1$ ആയതുകൊണ്ട് ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽ നിന്നും നിശ്ചിതരേഖയിൽ നിന്നും തുല്യ അകലത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ ബിന്ദുപഥമാണ് ഈ വക്രം. സമീകരണത്തിന്റെ മാനകരൂപം (standard



പരാബൊള

form) $y^2=4ax$; ശീർഷം (0, 0) സമമിതി അക്ഷം x-അക്ഷം; നിയതരേഖയുടെ സമീകരണം $x+a=0$ (x അക്ഷത്തിന്റെ ഇടതു വശത്തു y അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായി a ദൂരത്തിലുള്ളത്).

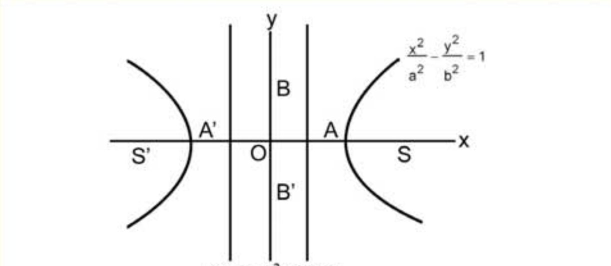
എലിപ്സ്. ഉൾകേന്ദ്രത $e<1$ ആയ കോണികമാണ് എലിപ്സ്. വലിച്ചുനീട്ടിയ ഒരു വൃത്തത്തെപ്പോലെയാണ് ഇതിന്റെ ആകൃതി. മാനക സമീകരണം $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; രണ്ടു ഫോക്കസ്സുകൾ S (æ; 0), S^1 (−æ,0); രണ്ടു നിയതരേഖകൾ $x=\frac{a}{e}, x=\frac{-a}{e}$. ചിത്രത്തിൽ എലിപ്സിന്റെ ദീർഘ അക്ഷം (major axis) = A'A = 2a;



എലിപ്സ്

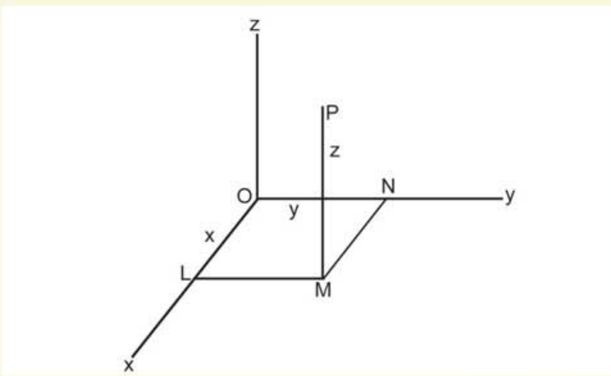
ലഘു അക്ഷം (minor axis) = B'B = 2b. P എന്നത് എലിപ്സിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ബിന്ദുവായാൽ SP + S'P = 2a എന്നു കിട്ടുന്നു. അതായത് രണ്ടു നിശ്ചിത ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്നുള്ള ദൂരങ്ങളുടെ തുക സ്ഥിരസംഖ്യയാകത്തക്കവണ്ണം സഞ്ചരിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ പഥമാണ് എലിപ്സ്. ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്രപരമായി ഈ വക്രത്തിനു വളരെ പ്രാധാന്യമുണ്ട്. കെപ്ലറുടെ നിയമമനുസരിച്ച് സൂര്യനു ചുറ്റുമുള്ള ഗ്രഹങ്ങളുടെ സഞ്ചാരപഥം എലിപ്സുകളാണ്; സൂര്യന്റെ സ്ഥിരസ്ഥാനം ഒരു ഫോക്കസ്സിലും.

ഹൈപർബൊള. ഹൈപർബൊളയുടെ ഉൾകേന്ദ്രത $e>1$. മാനക സമീകരണം $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; രണ്ടു ഫോക്കസ്സുകൾ S (æ, 0), S^1 (−æ,0); A'A = 2a, B'B = 2b. A'A-യെ അനുപ്രസ്ഥ അക്ഷം (transverse axis) എന്നും B'B-യെ സംയുഗ്മി അക്ഷം (conjugate axis) എന്നും പറയുന്നു. രണ്ടു നിയതരേഖകൾ $x=\frac{a}{e}$, $x=-\frac{a}{e}$. കോണികങ്ങളിൽ ഹൈപർബൊളയ്ക്കു മാത്രമേ അനന്തസ്പർശികൾ (asymptotes) ഉള്ളൂ.

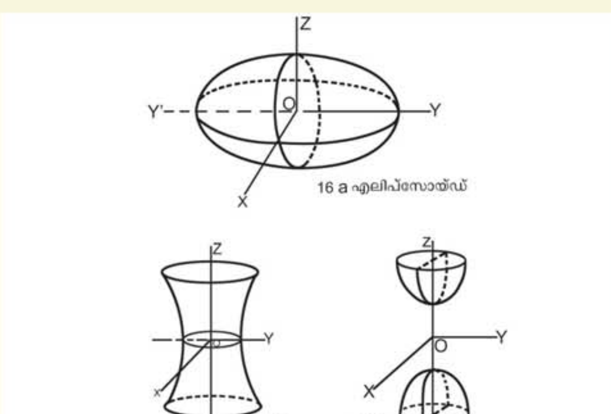


ഹൈപർബൊള

4. **ത്രിവിമീയ വിശ്ലേഷക ജ്യാമിതി**. ഈ ശാഖയിൽ 3 നിർദേശാങ്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് സ്പേസിൽ ഒരു ബിന്ദുവിനെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. ചിത്രം (15) നോക്കുക. ബിന്ദു P-യെ P (x, y, z) എന്നെഴുതുന്നു. ത്രിവിമീയ വിശ്ലേഷക ജ്യാമിതിയിൽ തലം, രേഖ, ഗോളം, കോൺ, സിലിണ്ടർ തുടങ്ങിയവയുടെ ഗുണധർമങ്ങൾ അപഗ്രഥിക്കുന്നു. ത്രിവിമീയ ജ്യാമിതിയിൽ $ax + by + cz + d = 0$ എന്ന സമീകരണം ഒരു തല(plane)ത്തെ കുറിക്കുന്നു. ത്രിവിമീയ സ്പേസിൽ ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽ നിന്നു സ്ഥിരദൂരത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ ബിന്ദുപഥ



മാണ് ഗോളം. ഗോളത്തിന്റെ മാനക സമീകരണം $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$. x, y, z ചരങ്ങളിലുള്ള $F(x, y, z) = 0$ എന്ന സമീകരണം പൊതുവായി ഒരു പ്രതല(surface)ത്തെയാണു പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നത്. ഒരു പ്രതലം എന്നു പറയുമ്പോൾ അതിൽ വ്യത്യസ്ത ഘനരൂപങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്നു. ഗോളം, കോൺ, സിലിണ്ടർ, എലിപ്സോയ്ഡ്, ഹൈപർബൊളോയ്ഡ് ഇവയൊക്കെ പ്രതലങ്ങളാണ്. ശീർഷം മൂലബിന്ദുവായ കോണിന്റെ സാമാന്യ



16 a എലിപ്സോയ്ഡ്

16 b ഏകപ്രതല ഹൈപർബൊളോയ്ഡ്

16 c ദ്വിപത്ര ഹൈപർബൊളോയ്ഡ്

രൂപം ഒരു പ്രത്യേക നിബന്ധനയ്ക്ക് വിധേയമായി $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ എന്നെഴുതാം. ഈ നിബന്ധനയാണ് $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 \neq 0$. $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ എന്ന രൂപത്തിലെഴുതുന്ന പ്രതലങ്ങളെ കേന്ദ്രീയ കോണികജങ്ങൾ (central quadrics) എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഓരോ നിർദേശാങ്കത്തിനും ഇവ സമമിതമാണ്.

ഇവയിൽ എലിപ്സോയ്ഡും $\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right]$,

ഏകപ്രതലഹൈപർബൊളോയ്ഡും

$\left[\text{hyperboloid of one sheet}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\right]$,

ദ്വിപ്രതല ഹൈപർബൊളോയ്ഡും

$\left[\text{hyperboloid of two sheets}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1\right]$ ഉൾപ്പെടുന്നു.

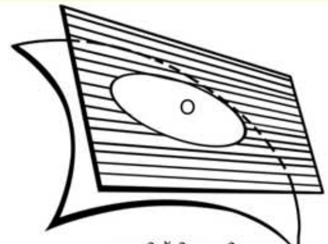
V. **അയൂക്ലീഡിയൻ ജ്യാമിതി** (Non-Euclidean Geometry). യൂക്ലിഡിന്റെ ആക്സിയങ്ങളിൽ അഞ്ചാമത്തേതായ സമാന്തര ആക്സിയം ഒഴിവാക്കിക്കൊണ്ട് നിർമിക്കപ്പെട്ട എല്ലാ ജ്യാമിതികളും അയൂക്ലീഡിയൻ വിഭാഗത്തിൽപ്പെടുന്നു. ഹൈപർബൊളിക ജ്യാമിതിയും എലിപ്റ്റിക ജ്യാമിതിയും അയൂക്ലീഡിയൻ ജ്യാമിതികളാണ്. ആക്സിയങ്ങളുടെ സ്വീകാര രീതിയനുസരിച്ച് ഇവയെ യഥാക്രമം 'ലൊബാഷ്യേവ്സ്കിയൻ ജ്യാമിതി' എന്നും 'റീമാനിയൻ ജ്യാമിതി' എന്നും വിളിക്കുന്നു.

1. **ഹൈപർബൊളിക ജ്യാമിതി**. 'ഒരു നേർവരയ്ക്കു സമാന്തരമായി അതിലില്ലാത്ത ഒരു ബിന്ദുവിൽക്കൂടി ചുരുങ്ങിയത് രണ്ടു വരകളെങ്കിലും വരയ്ക്കാം' എന്ന ആക്സിയമാണ് ഇതിൽ പകരം ആക്സിയമായി സ്വീകരിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഈ ജ്യാമിതിയിൽ ഒരു ത്രികോണത്തിലെ കോണങ്ങളുടെ തുക 0°-ക്കും 180°-ക്കും ഇടയിൽ ഏതു വിലയും ആകാം. മറ്റൊരു പ്രമേയമാണ് തുല്യ അകലമുള്ള രണ്ടു സമാന്തരരേഖകൾ ഇല്ല എന്നത്. ഹൈപർബൊളിക ജ്യാമിതിയിൽ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണം കുറഞ്ഞുവരുന്തോറും അതിലെ കോണങ്ങളുടെ തുക കൂടുകയും വിസ്തീർണം പൂജ്യത്തെ സമീപിക്കുമ്പോൾ കോണങ്ങളുടെ തുക 180° യോടടുക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. ത്രികോണം ABC-യിൽ, കോണങ്ങൾ റേഡിയൻ അളവിൽ α, β, γ ആയാൽ ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണം $K = k(\pi - \alpha - \beta - \gamma)$ ആണ്. ഇതിൽ നിന്ന് $K < k\pi$ എന്നു കിട്ടുന്നു. അതായത് ത്രികോണങ്ങളുടെ വിസ്തീർണം പരിബദ്ധം (bounded) ആണ്. ത്രികോണങ്ങളെ സംബന്ധിച്ച് വിസ്മയം പകരുന്ന ഒരു അയൂക്ലീഡിയൻ ഗുണധർമമാണിത്.

2. **എലിപ്റ്റിക ജ്യാമിതി**. 1854-ൽ റീമാൻ രൂപം കൊടുത്ത അയൂക്ലീഡിയ ജ്യാമിതിയാണിത്. യൂക്ലിഡിന്റെ സമാന്തര ആക്സിയത്തിനു ബദലായി 'സമാന്തര രേഖകൾ ഇല്ല' എന്ന ആക്സിയം റീമാൻ സ്വീകരിച്ചു.

റീമാനിയൻ ജ്യാമിതിയെക്കുറിച്ചു സാമാന്യമായി മനസ്സിലാക്കാൻ സ്പേസിൽ ഒരു വക്രപ്രതലവും (curved surface) അതിൽ ഒരു ബിന്ദുവും ബിന്ദുവിൽക്കൂടി പോകുന്ന വക്രപ്രതലത്തിന്റെ സ്പർശതലവും (tangent plane) സങ്കല്പിക്കുക. ഈ പ്രതലത്തിന്റെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന 'നേർവര' ഈ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന ഏറ്റവും നീളം കുറഞ്ഞ വക്രം (ജിയോഡസിക്ക്) ആയിരിക്കട്ടെ. അപ്പോൾ പ്രതലത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ രണ്ടു വിധത്തിലുള്ളവയാണ്:

(i) ബിന്ദുക്കളുടെ സാമീപ്യമുൾക്കൊള്ളുന്ന പ്രതലം ഗോളാകൃതി പോലെയാവുകയും പ്രതലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സ്പർശതലത്തിന്റെ ഒരു വശത്തുമാത്രം പ്രതലം ഉണ്ടായിരിക്കു

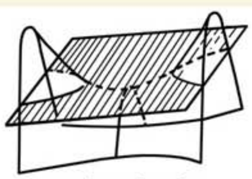


എലിപ്റ്റിക ബിന്ദു

കയും ചെയ്യുന്ന അവസ്ഥ. പ്രതലത്തിലെ ഇത്തരം ബിന്ദുക്കളെ എലിപ്റ്റിക ബിന്ദുക്കൾ എന്നു പറയുന്നു.

ഇവിടെ സ്പർശതലം ഒരല്പം സമാന്തരമായി താഴ്ത്തുമ്പോൾ അതു പ്രതലത്തെ എലിപ്റ്റിക വക്രത്തിന്റെ ആകൃതിയിൽ ഛേദിക്കുന്നു. ചിത്രം (17) നോക്കുക.

(ii) ബിന്ദുക്കളുടെ സാമീപ്യമുൾക്കൊള്ളുന്ന പ്രതലം രണ്ടു വശവും ഉയർന്ന് നടുക്കു കുഴിഞ്ഞിരിക്കുകയും (മോഡയുടെ പാർശ്വതലം പോലെ) പ്രതലത്തിന്റെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സ്പർശതലം പ്രതലത്തെ രണ്ടായി ഛേദിക്കുകയും ചെയ്യുന്ന അവസ്ഥ.



ഹൈപർബൊളിക ബിന്ദു

ഇവിടെ സ്പർശതലം അല്പം സമാന്തരമായി താഴ്ത്തുമ്പോൾ പ്രതലത്തെ ഹൈപർബൊളയുടെ വക്രത്തിന്റെ ആകൃതിയിൽ രണ്ടായി ഛേദിക്കുന്നു. പ്രതലത്തിലുള്ള ഇത്തരം ബിന്ദുക്കളെ ഹൈപർബൊളിക ബിന്ദുക്കൾ എന്നു പറയുന്നു. ചിത്രം (18) നോക്കുക.

സ്പേസിലെ ജ്യാമിതി വിഭാവന ചെയ്യുന്ന പ്രത്യേകതകൾ റീമാന്റെ പഠനങ്ങൾക്കനുയോജ്യമാണ്. റീമാന്റെ ജ്യാമിതിയിൽ എല്ലാ ദൂരങ്ങളും ഒരു ധനസ്ഥിരാങ്കത്തിനു തുല്യമോ അതിൽ കുറവോ ആയിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് മറ്റ് ജ്യാമിതികളിൽ നിന്നു വ്യത്യസ്തങ്ങളായ പല ഗുണധർമങ്ങളും ഈ ജ്യാമിതിയിലുണ്ട്. ഉദാ. ഒരു ത്രികോണത്തിലെ കോണങ്ങളുടെ തുക എപ്പോഴും 180° യിൽ കൂടുതലായിരിക്കും. ചതുർഭുജത്തിലെ നാലു കോണുകളുടെ തുക 360° യിലും അധികമാണ്. ത്രികോണം ABC യിൽ കോണങ്ങൾ α, β, γ ആയാൽ അതിന്റെ വിസ്തീർണം K കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള റീമാന്റെ ഫോർമുലയാണ് $K = k(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$. ഇതിൽ നിന്നു ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണം പൂജ്യത്തോടടുക്കുമ്പോൾ കോണങ്ങളുടെ തുക ക്രമേണ കുറഞ്ഞ് 180°-യോടടുക്കുന്നു എന്നു വ്യക്തമാണ്. ഇറ്റലിക്കാരായ റിക്കി (Gregorio Ricci: 1853-1925) യും ലെവി-സിവിറ്റ (Tullio Levi-Civita: 1873-1941)യും റീമാന്റെ അയുക്ലീഡിയൻ ജ്യാമിതിയിൽ പില്ക്കാലത്തു കൂടുതൽ പഠനങ്ങൾ നടത്തിയവരാണ്.

(പ്രൊഫ. കെ. ജയചന്ദ്രൻ)